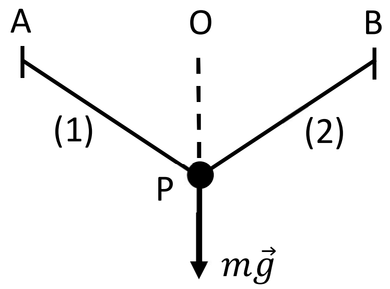
MPSI 1 - DS 4 - 12/01/2022

Consignes générales :

- L'ordre est indifférent, mais on séparera clairement les exercices ;
- il est conseillé de tous les aborder (difficulté progressive dans un exercice).
- Toute question, même qualitative, appelle une réponse argumentée.
- La qualité de la rédaction (*français* et *écriture mathématique*) sera notée.
- La qualité de la présentation également : soin, aération, résultats encadrés.
- Une application numérique sans unité explicite et appropriée ne sera pas prise en compte.
- Pour le nombre de chiffres significatifs à conserver pour le résultat final, on s'aligne sur la donnée la moins précise, avec au moins 2 chiffres significatifs (sauf indication contraire).

1- MASSE ENTRE DEUX ÉLASTIQUES

Une masse m est accrochée en P entre deux élastiques identiques (k ; L_0), de masse négligeable, dont l'extrémité libre est accrochée en A pour l'un en B pour l'autre, les points A et B étant fixes sur une même horizontale, avec $AO = OB = a > L_0$.



1. Exprimer la norme de la tension de chaque élastique dans la situation représentée, en fonction de la variable $z = OP$ (axe Oz orienté vers le bas).
2. En déduire l'équation dont est solution z_e à l'équilibre.

On rappelle que la fonction 'bisect' de Python résout par dichotomie une équation $f(x) = 0$ avec :

`scipy.optimize.bisect(f, a, b, args=())`

Find root of a function within an interval using bisection.

Basic bisection routine to find a zero of the function *f* between the arguments *a* and *b*.

f(a) and *f(b)* cannot have the same signs. Slow but sure.

Parameters: **f** : *function*

Python function returning a number. *f* must be continuous, and f(a) and f(b) must have opposite signs.

a : *scalar*

One end of the bracketing interval [a,b].

b : *scalar*

The other end of the bracketing interval [a,b].

args : *tuple, optional*

Containing extra arguments for the function *f*.

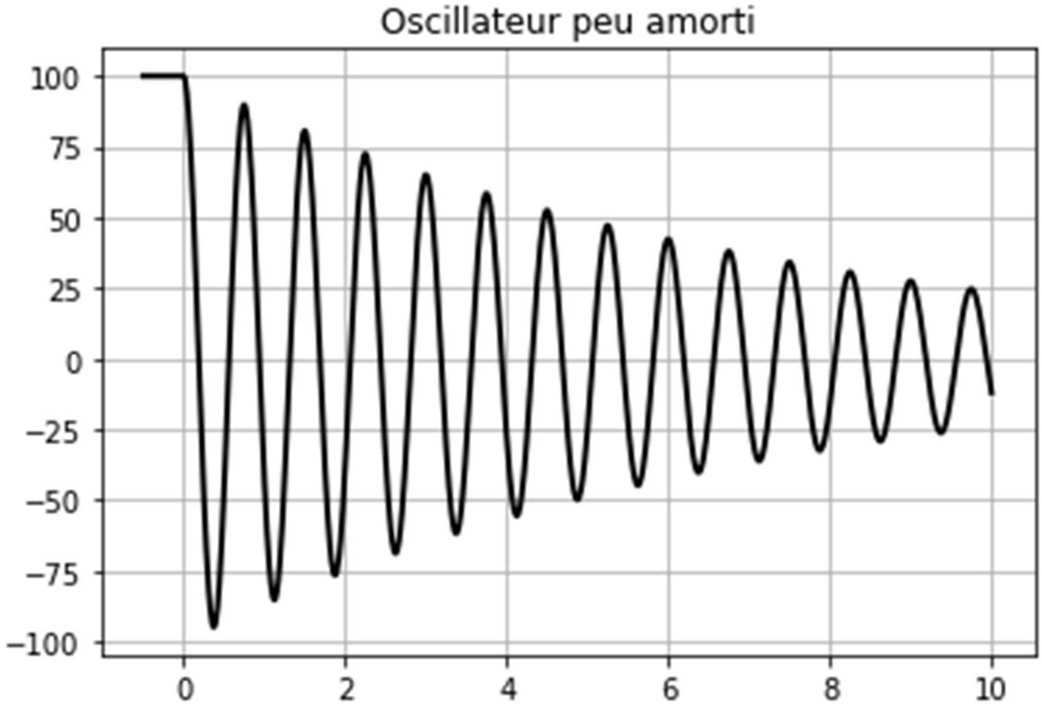
3. À quelle condition peut-on appeler directement 'bisect' ? Préciser la façon de procéder.
4. On suppose que les constantes g, k, L_0, a ont été affectées (avec l'identificateur L0 pour L_0) ; écrire un script Python permettant d'appeler une fonction '**eq(m)**' qui prenne comme argument une masse m et renvoie la valeur de z_e pour cette masse, avec trois chiffres après la virgule.

NB : - on ne demande pas seulement d'écrire eq(m) ;
- on ne peut pas importer '*math as m*' si on veut utiliser la variable m par la suite.

2- OSCILLATEUR MÉCANIQUE AMORTI PAR FROTTEMENT FLUIDE

On considère un oscillateur mécanique harmonique horizontal (avec force de rappel élastique), amorti par frottement visqueux ($-\alpha\vec{v}$).

1. Établir l'équation de la courbe $x(t)$ représentée ci-dessous.
2. Déterminer la valeur du facteur de qualité et celle de la durée caractéristique de l'amortissement (le temps en abscisse est en secondes).



3- PENDULE SIMPLE AVEC POINT D'ATTACHE MOBILE

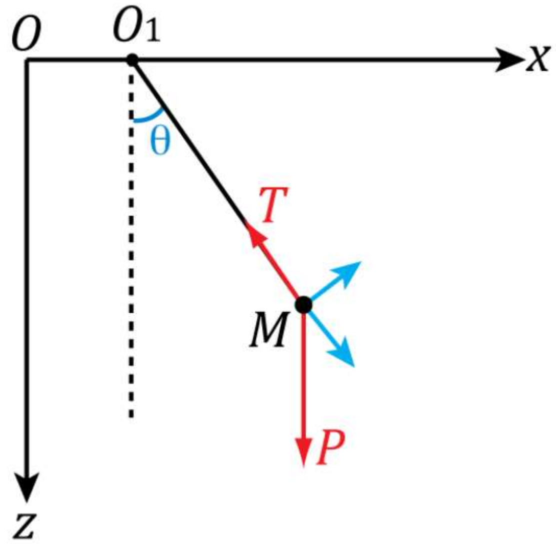
Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de longueur L.

L'autre extrémité O_1 du fil est d'abord fixée sur l'axe Ox, immobile en référentiel terrestre galiléen.

1. Le pendule oscillant autour de la verticale, avec une faible amplitude θ_0, établir la loi $\theta(t)$.
2. Vérifier la conservation de l'énergie mécanique au cours du mouvement.

Dans la suite, le point O_1 effectue des oscillations sinusoïdales sur l'axe Ox : $\overrightarrow{OO_1}(t) = X \sin \omega t \, \vec{u}_x$.

Les conditions initiales du mouvement du pendule sont désormais $\theta_0 = 0$ et $\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)_0 = 0$.



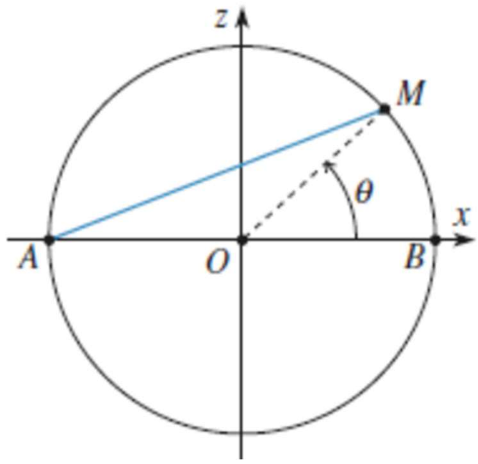
3. Exprimer successivement les vecteurs position $\overrightarrow{OM}$, vitesse et accélération, en utilisant les vecteurs de base $\vec{u}_x$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_r$. Réécrire alors l'accélération dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.
4. Déduire de la relation fondamentale de la dynamique l'équation différentielle du second ordre à laquelle obéit $\theta(t)$, avec comme second membre $\omega^2 \frac{X}{L} \sin \omega t$.
5. Résoudre complètement cette équation par la méthode « solution générale plus solution particulière », en cherchant celle-ci sous la forme $C \sin \omega t$ (C constante). Commenter.

4- FREINAGE SUR UN PLAN INCLINÉ

Un mobile assimilé à un point matériel M de masse m, glisse avec peu de frottements suivant la ligne de plus grande pente Ox d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.

1. Il quitte l'origine O avec une vitesse nulle ; exprimer sa vitesse maximale à l'abscisse x.
2. Après avoir parcouru la distance L, il aborde une zone de freinage où le coefficient de frottement solide est f. Déterminer la valeur minimale de f permettant l'arrêt sur une distance D donnée.

5- ANNEAU SUR UN CERCEAU VERTICAL



Un petit anneau M, assimilé à un point matériel de masse m, glisse sans frottement sur un support circulaire de rayon R et de centre O, fixe dans un plan vertical.

L'anneau subit une force de rappel $\vec{F} = -k\overrightarrow{AM}$ $(k > 0)$, son poids et une réaction $\vec{N}$ du cerceau.

1. Dans la position de M illustrée sur la figure, justifier l'orientation centrifuge ou centripète de la réaction $\vec{N}$ du cerceau sur l'anneau.
2. On rappelle que dans un cercle, l'angle entre le rayon OB et le rayon OM est le double de celui entre le diamètre AB et la corde AM.
   Exprimer la distance AM en fonction de R et θ.
   En déduire l'expression de l'énergie potentielle élastique associée à $\vec{F}$, en utilisant directement l'expression établie en cours pour une force de rappel élastique.
3. L'analyse dynamique de l'équilibre de M (non demandée) conduit à la relation $\tan\theta_{eq} = \frac{mg}{kR}$.
   Combien y a-t-il de positions d'équilibre ?
   Dans quel(s) quadrant(s) est-elle ou sont-elles située(s) ?
   Quelles sont les positions d'équilibre limites, pour $mg \ll kR$ et $kR \ll mg$?
4. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur du mobile, l'origine étant prise au niveau de O. En déduire l'énergie potentielle totale $E_p(\theta)$; on rappelle que $\cos^2 x = \frac{1+\cos}{2}$.
5. Retrouver par une approche énergétique la condition d'équilibre précédemment utilisée, et analyser la stabilité de la ou des positions d'équilibre.

— = FIN = —

1- MASSE ENTRE DEUX ÉLASTIQUES

Chaque fil exerce une force d'intensité $k\,(L - L_0) = k\left(\sqrt{a^2 + z^2}\ - L_0\right)$, selon sa direction.

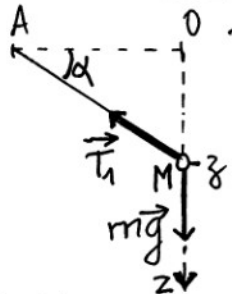
Les deux forces se compensent sur l'horizontale, et sur la verticale, à l'équilibre on a :

$mg = 2 \times k\,(L - L_0)\ \cos\alpha$, où α est l'angle entre un fil et la verticale, de sorte que $L\cos\alpha = z$.

On a donc $\boldsymbol{mg = 2k\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)z}$; c'est l'équation cherchée.

```
import math as ma
from scipy.optimize import bisect
k = 42 ; g = 10 ; a = 0.120 ; L0 = 0.100
def fcn(z,m):
   return m*g - k*z*(1 - L0 / ma.sqrt(a*a+z*z) )
def eq(m):
   return round(bisect(fcn,0,10*L0,args=(m)),3)
```

2- OSCILLATEUR MÉCANIQUE AMORTI PAR FROTTEMENT FLUIDE

1) 

$T_1 = T_2 = k(AM - L_0)$
$= k\left(\sqrt{a^2+z^2} - L_0\right)$

2) Équilibre : $mg = 2T_1 \sin\alpha = 2T_1 \dfrac{z_e}{AM_e}$

et d'après 1) : $mg = 2kz_e\left(1 - \dfrac{L_0}{AM_e}\right)$

soit $\boxed{mg = 2kz_e\left(1 - \dfrac{L_0}{\sqrt{a^2+z_e^2}}\right)}$

3) a) On utilise directement "bisect" si on l'a importé : from scipy.optimize import bisect

3b) Il faut définir la fonction à annuler pour pouvoir appeler bisect dans la fonction demandée :

avec import math

```
def fcn(z):
  return m*g-k*z*(1-L0/math.sqrt(a*a+z*z))
def eq(m):
  return round(bisect(fcn,0,10*L0,m),3)
```

Oscillateur amorti

On sait que dans ce cas $T_0 \simeq T$ car $Q \gg 1$.

On lit $T \simeq 6/8 \simeq 7{,}5\,s$.

L'E.D. est $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega \simeq \omega_0$

d'où $x(t) = (\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)\,e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$

La durée caractéristique est τ telle que $e^{-\omega_0 t/2Q} = e^{-t/\tau}$ soit $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$.

Pour obtenir Q, on utilise le décrément logarithmique

$\delta = \ln\dfrac{A_n}{A_{n+1}} = \dfrac{\omega_0 T}{2Q} \simeq \dfrac{\pi}{Q}$ lorsque Q élevé.

Sur la courbe : $\delta = \dfrac{-1}{13}\ln\dfrac{A_{14}}{A_1} = \dfrac{-1}{13}\ln\dfrac{25}{100}$

$(\delta \simeq 0{,}1066\ldots)$ $\quad Q = \dfrac{13\pi}{\ln 4} \simeq 29{,}5$.

$\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0} = \dfrac{Q\cdot T_0}{\pi} = \dfrac{T_0}{\delta} = \dfrac{13T_0}{\ln 4} \simeq 7{,}0\,s$.

3- PENDULE SIMPLE AVEC POINT D'ATTACHE MOBILE

1) RFD en réf. gal., projetée sur la base polaire : $mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \simeq -mg\cdot\theta$ car "faible amplitude", soit :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0 \overset{C.I.}{\Rightarrow} \theta = \theta_0\cos\omega_0 t \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

2) $\vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{O_1M}$ à dériver en réf. terrestre

$$= X\sin\omega t\,\vec{u}_x + L\vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \vec{v} = X\omega\cos\omega t\,\vec{u}_x + L\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -X\omega^2\sin\omega t\,\vec{u}_x + L\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - L\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

Or $\vec{u}_x = \sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta$

donc $\vec{a} = \left[-X\omega^2\sin\omega t\sin\theta - L\dot{\theta}^2\right]\vec{u}_r + \left[-X\omega^2\sin\omega t\cos\theta + L\ddot{\theta}\right]\vec{u}_\theta$

En projection sur $\vec{u}_\theta$, la RFD s'écrit :

$$\boxed{L\ddot{\theta} - X\omega^2\sin\omega t\cos\theta = -g\cdot\sin\theta}$$

3) $|\theta| \ll 1$ rad $\Rightarrow \cos\theta \simeq 1$ et $\sin\theta \simeq 0$, alors :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \omega^2\frac{X}{L}\sin\omega t}$$

- sgeh : $\alpha\cos\omega_0 t + \beta\sin\omega_0 t$
- spec : $\gamma\sin\omega t$ qui vérifie donc :

$$\forall t,\ (-\omega^2 + \omega_0^2)\gamma\sin\omega t = \omega^2\frac{X}{L}\sin\omega t$$

d'où $\gamma = \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\cdot\dfrac{X}{L}$

et $\theta(t) = \alpha\cos\omega_0 t + \beta\sin\omega_0 t + \gamma\sin\omega t$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(t) = -\alpha\omega_0\sin\omega_0 t + \beta\omega_0\cos\omega_0 t + \gamma\omega\ \ \omega t$$

C.I. : $\begin{cases}\theta_0 = 0\\ \dot{\theta}_0 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = 0\\ \beta\omega_0 + \gamma\omega = 0\end{cases}$

et finalement :

$$\boxed{\theta(t) = \frac{X}{L}\cdot\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right)}$$

4- FREINAGE SUR UN PLAN INCLINÉ

1. La vitesse maximale à l'abscisse x est obtenue si les frottements sont nuls ; le mouvement est alors accéléré dans le sens de la pente $\ddot{x} = g\sin\alpha \overset{C.I.}{\Rightarrow} v = \dot{x} = (g\sin\alpha)t \overset{C.I.}{\Rightarrow} x = (g\sin\alpha)t^2/2$; on en déduit $\boldsymbol{v(x) = \sqrt{2g\sin\alpha\, x}}$.

   NB : bien plus simplement **par TEC/TEM :** $\boldsymbol{\frac{1}{2}mv_L^2 = mg(L\sin\alpha) \Leftrightarrow v_L = \sqrt{2g\sin\alpha\, L}}$.

2. Dans la zone de freinage, la force opposée au mouvement (la réaction tangentielle R_T) est de norme maximale $f\cdot R_N$, où la réaction normale est $R_N = mg\cos\alpha$, constante car $\alpha = c^{te}$.
   Le mouvement est (uniformément) **décéléré** si la force résistante est d'intensité supérieure à celle de la force motrice, soit : $R_T = fmg\cos\alpha > mg\sin\alpha$, soit **si $\boldsymbol{f > \tan\alpha}$** $(0 < \alpha < \pi/2)$.
   Dans ce cas, on peut poser $a = fg\cos\alpha - g\sin\alpha > 0$ et remettre l'origine des dates à zéro au début du freinage : $\ddot{x} = -a \overset{C.I.}{\Rightarrow} v = \dot{x} = v_L - a\,t \overset{C.I.}{\Rightarrow} x = v_L t - a\,t^2/2$.
   La condition souhaitée équivaut à $\boldsymbol{x(v = 0) \leq D}$, ce qui conduit à exprimer x en fcn de v : La vitesse s'annule à $t = v_L/a$, pour une distance parcourue $v_L^2/2a$; il faut $a \geq v_L^2/2D$, d'où :

$$f \geq \frac{\frac{v_L^2}{2D} + g\sin\alpha}{g\cos\alpha} \Leftrightarrow \boldsymbol{f \geq \tan\alpha + \frac{v_L^2}{2Dg\cos\alpha}}.$$

   NB : on vérifie que les influences de D et v_L sont ce qu'elles doivent être.

   Ici encore une approche énergétique facilite les calculs car évite de faire intervenir le temps :

   TEM/TEC : $\boldsymbol{0 - \frac{1}{2}mv_L^2 = mg(D\sin\alpha) - (fmg\cos\alpha)\,D}$, d'où le résultat.

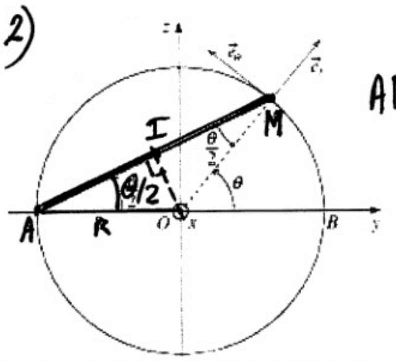
5- ANNEAU SUR UN CERCEAU VERTICAL

1) L'anneau est tiré vers l'intérieur par le poids et l'élastique, donc la réaction $\vec{N}$ est centrifuge.

3) $\tan\theta = \frac{mg}{kR} > 0$ donc une solution θ_1 entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et une entre π et $\frac{3\pi}{2}$,

soit $\theta_2 = \pi + \theta_1$, avec $\theta_1 = \arctan\frac{mg}{kR}$

2)



$AM = 2AI$

$= 2R\cos\frac{\theta}{2}$

4) $E_p = \frac{1}{2}k(AM)^2 + mg\text{"}z\text{"}$ avec $z\uparrow$

En prenant $z = 0$ lorsque $\theta = 0$,

on a $z = R\cdot\sin\theta$ et donc en fon de θ :

$$E_p(\theta) = \frac{1}{2}k\left(2R\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 + mgR\sin\theta$$

or $2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1+\cos\theta$ donc :

$$\boxed{E_p(\theta) = kR^2(1+\cos\theta) + mgR\sin\theta}$$

5) équilibre lorsque E_p est extrémale ;

$$\frac{dE_p}{d\theta} = -kR^2\sin\theta + mgR\cos\theta$$

$= 0$ pour $\tan\theta = \frac{mg}{kR}$, cohérent avec 3°)

stabilité : stable si E_p minimale, instable — maximale

$$E_p''(\theta) = -kR^2\cos\theta - mgR\sin\theta = -kR^2\cos\theta\underbrace{\left(1+\frac{mg}{kR}\tan\theta\right)}_{>0}$$

$$\begin{cases} E_p''(\theta_1) < 0 : \text{maxi, instabilité} \\ E_p''(\theta_2) > 0 : \text{mini} \Rightarrow \text{stabilité.} \end{cases}$$